Inleveropgaven stochastiek 1

Set 6: inleverdeadline dinsdag 12 december 11:00

Opmerking 1: elke opgave dient beredeneerd te worden. Er kunnen 9 punten behaald worden; cijfer = totaal aantal punten +1 (afgerond op een geheel getal).

Opmerking 2: sommige opgaven leveren geen punten op. Dit zijn dus de in het college besproken "oefenopgaven", en deze hoeven dus niet te worden ingeleverd.

Opgave 1 (2pt)

In een gegeven bioscoopzaal zijn 100 genummerde stoelen. Op de bioscoopkaartjes staat het nummer van de stoel waarop de eigenaar van het kaartje dient te gaan zitten. Stel dat er 83 bezoekers zijn, die allen het stoelnummer op hun kaartje negeren en een willekeurige vrije stoel kiezen. Zij A_j, $j \in \{1, 2, \dots, 83\}$, de gebeurtenis dat de j^{de} bezoeker (toevallig) op de goede stoel gaat zitten (d.w.z. op de stoel met hetzelfde nummer als wat er op zijn kaartje staat), en zij N de stochast die weergeeft hoeveel mensen toevallig op de 'goede' stoel terecht zijn gekomen (d.w.z. van hoeveel mensen het stoelnummer op het bioscoopkaartje overeenkomt met het werkelijke stoelnummer).

a. (0pt) Leg uit waarom geldt $\mathbb{E}(N) = \sum_{j=1}^{83} \mathbb{P}(A_j)$. (Hint: beschouw 1_{A_j}, $j \in \{1, 2, \dots, 83\}$).

b. (1pt) Bepaal $\mathbb{E}(N)$.

c. (1pt) Gebruik de inclusie-exclusie formule om te bepalen wat de kans is dat géén van de eerste vier bezoekers op zijn/haar eigen stoel is gaan zitten.

Opgave 2 (0pt)

Zij $X \sim \text{Uniform}([-3, 2])$.

a. (0pt) Schets f_X en F_X.

b. (0pt) Bepaal $\mathbb{P}(X < -1 \,|\, |X| > 1)$.

Opgave 3 (2pt)

Zij $\lambda \in (0, \infty)$ en zij $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Zij $x, y \in [0, \infty)$ zodanig dat $y > x$.

a. (1pt) Bepaal $\mathbb{P}(X > y - x)$ en $\mathbb{P}(X > y | X > x)$.

b. (1pt) Er wordt weleens gezegd dat de exponentiele verdeling *geheugenvrij* is. Leg op basis van deel (a) uit wat hiermee bedoeld wordt.

Opgave 4 (2pt)

Zij X een stochast en zij $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (cumulatieve) verdelingsfunctie van X, d.w.z. $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

a. (0pt) Toon aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: $\lim_{y \downarrow x} F_X(y) = F_X(x)$ (N.B. dit is op college voorgedaan dus ga even na of je dat begrijpt).

b. (2pt) Zij $c \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\mathbb{P}(X = c) = 0$. Toon aan dat $\lim_{y \uparrow c} F_X(y) = F_X(c)$.

c. (0pt) Zij $c \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\mathbb{P}(X = c) = 0$. Leg uit waarom uit (a) en (b) volgt dat F_X continu is in c.

Opgave 5 (0pt)

Voor $c \in \mathbb{R}$ zij $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} cx(1-x), & x \in [0,1]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]. \end{cases}$$

a. (0pt) Ga na dat $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\, dx = 1$ dan en slechts dan als $c = 6$.

b. (0pt) De functie f_6 is kansdichtheidsfunctie. Bepaal de bijbehorende verdelingsfunctie F.

c. (0pt) Maak een schets van f_6 en F.

Opgave 6 (4pt)

Voor $c \in (0, \infty)$ zij $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{cx}, & x \in [1, e^c]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1, e^c]. \end{cases}$$

a. (1pt) Ga na dat $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\, dx = 1$ voor alle $c \in (0, \infty)$.

b. (1pt) De functie f_1 is kansdichtheidsfunctie. Bepaal de bijbehorende verdelingsfunctie F.

c. (2pt) Maak een schets van f_1 en F.